Bemerkungen zu einigen Lehrsätzen des höchst illustren Lagrange*

Leonhard Euler

Nachdem ich dem illustren Herrn Lagrange ein gewisses Theorem aus denen, die ich vor nicht allzu langer Zeit bewiesen habe, in welchem ich gezeigt habe, dass der Wert der Integralformel $\int \frac{(x-1)dx}{\log x}$, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, $= \log 2$ ist, mitgeteilt hatte, hat er von der Neuheit dieses Gegenstands angetrieben nicht nur mit glücklichstem Erfolgt einen Beweis der Formel entdeckt, sondern auch viele andere wunderschöne Entdeckungen daraus abgeleitet, deren weitere Erläuterung für die analytische Wissenschaft größte Zuwächse zu verheißen scheint, aus welcher Art er mir sehr wohlwollend einige sehr schöne Beispiele hat zukommen lassen, welche ich sofort mit größtem Eifer studiert habe; und weil diese Materie Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, werde ich meine Gedanken, die sich mir bei dieser Gelegenheit ergeben haben, genauer darstellen. Weil diese gleichsam neue Art der Analysis hauptsächlich in Integralformeln von solcher Art besteht, in denen der Variable nach der Integration ein gewisser bestimmter Wert zugeteilt wird, werde ich, um die unangenehmen Umwege über Worte zu vermeiden, welche die wiederholte Erwähnung solcher Bedingungen erfordern würde, eine eigene Bezeichungsweise verwenden, welche vor allem anderen genauer zu erklären sein wird.

Annahme

§1 Mit dieser Schreibweise

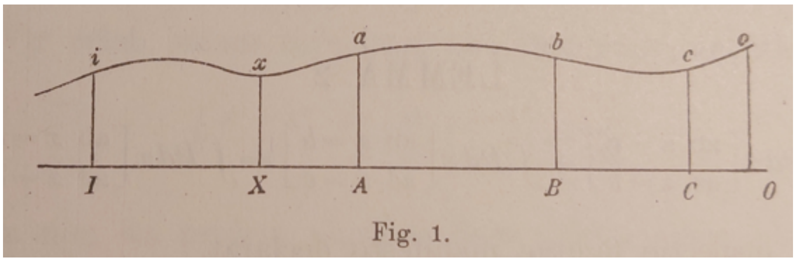
*Originaltitel: "Observation in aliquot theoremata illustrissimi de la Grange", zuerst publiziert in: *Opuscula analytica, Band 2* (1785, geschrieben 1775): pp. 16–21, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 156 – 177, Eneström Nummer E587, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix}$$

wird das Integral $\int Pdx$ bezeichnet, so genommen worden zu sein, dass es für $x = a$ verschwindet, dann aber $x = b$ gesetzt wird; auf diese Weise ist es klar, dass sein Wert vollkommen bestimmt sein wird.

Scholion

§2 Um die Natur dieser Bestimmung besser zu erkennen, weil P ja eine Funktion von x bezeichnet, wollen wir ihre Natur mit einer bestimmten über der Achse IO konstruierten Kurve $ixabco$ (Fig.1) darstellen, von welcher



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

eine beliebige Ordinate Xx, die der Abszisse $IX = x$ zukommt, die Funktion P darbiete, sodass die Integralformel $\int Pdx$ unbestimmt die Fläche dieser Kurve ausdrückt. Wenn daher nun die Abszissen $IA = a$, $IB = b$ genommen werden, denen die Ordinaten Aa und Bb entsprechen, wird die vorgelegte Formel $AaBb$ die zwischen den Ordinaten Aa und Bb eingeschlossene Fläche bezeichnen. Auf dieselbe Weise, wenn eine andere bestimmte Ordinate $IC = c$ gesetzt wird, wird die Fläche $AaCc$ mit dieser Formel ausgedrückt werden

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix},$$

die Fläche $BbCc$ hingegen mit dieser Formel

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix};$$

Aber dann, wenn der Beginn von I aus genommen wird, wird die Fläche $IiAa$ mit dieser Formel angezeigt werden

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = a \end{bmatrix};$$

daher folgen sofort die nachstehenden, so prägnant ausgedrückten, Lemmata.

Lemma 1

§3

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = -\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = a \end{bmatrix}.$$

Weil ja nämlich, wenn b größer als a angesehen wird, die zweite Formel

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = a \end{bmatrix}$$

dieselbe Fläche $AaBb$ bezeichnet wie die erste, bloß umgekehrt betrachtet, wird dieser Ausdruck für negativ zu halten sein und so wird auch

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} + \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = a \end{bmatrix} = 0$$

sein.

Lemma 2

§4

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} + \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix} = \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix},$$

wie sie Betractung der Figur offensichtlich zeigt.

Lemma 3

§5

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix} - \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix},$$

wo in den beiden ersten Formeln dieselbe *untere* Grenze, natürlich $x = a$ auftaucht; von den *oberen* Grenzen, natürlich $x = c$ und $x = b$, gibt die zweite $x = b$ für die dritte Formel die *untere* Grenze, die erste hingegen die *obere* Grenze.

LEMMA 4

§6

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix} - \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix} = \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix},$$

wo man bemerke, dass die zwei ersten Formeln dieselbe *obere* Grenze haben, nämlich $x = c$, aber von den *oberen* Grenzen gibt die erste $x = a$ in der dritten Formel die *untere*, die zweite hingegen die *obere* Grenze.

LEMMA 5

§7

$$\int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} + \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = b \\ \text{bis } x = c \end{bmatrix} + \int Pdx \begin{bmatrix} \text{von } x = c \\ \text{bis } x = a \end{bmatrix} = 0.$$

SCHOLION

§8 Nachdem also diese Dinge, die per se offenkundig sind, vorausgeschickt worden sind, werde ich die wesentliche Punkte, die der hoch geehrte LAGRANGE mir mitgeteilt hat, der Reihe nach durchgehen. Zuerst macht er aber eine Erwähnung eines riesigen Pardaxons, dessen Natur er selbst nicht ganz zu durchschauen gesteht, von welchem aus ich also meine Betrachtungen beginnen werde.

AUFLÖSUNG DES RIESIGEN PARADOXONS

§9 Nachdem der hoch geehrte Herr dieses allgemeine Theorem entdeckt hatte

$$\int \frac{x^n - x^m}{\log x} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = 1 \end{bmatrix} = \log \frac{n}{m},$$

dessen Gültigkeit ich vor nicht allzu langer Zeit mit mehreren Beweisen untermauert habe, hat er $x^n = z$ und $x^m = y$ gesetzt; auf diese Weise wird der erste Teil $\int \frac{x^{n-1}dx}{\log x}$ in diesen überführt $\int \frac{dz}{\log z}$, in gleicher Weise aber der andere $\int \frac{x^{m-1}dx}{\log x}$ in diesen $\int \frac{dy}{\log y}$; daher, nachdem diese Teile getrennt genommen worden sind, folgt, dass

$$\int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = 1 \end{bmatrix} - \int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = 1 \end{bmatrix} = \log \frac{n}{m}$$

sein wird: Weil diese zwei Formeln vollkommen gleich sind und dieselben Integrationsgrenzen haben, wer würde dann nicht glauben, dass sie einander vollkommen gleich sein werden oder dass

$$\int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = 1 \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = 1 \end{bmatrix}$$

ist? Dennoch haben wir indes gesehen, dass die Differenzen zwischen diesen Formeln $\log \frac{n}{m}$ ist. Hier offenbart sich also eine Frage von größter Bedeutung, wie dieser offensichtliche Widerspruch aufgelöst werden muss.

§10 Hier ist es aber ratsam, zuerst zu bemerken, dass die beiden Größen y und z auf gewisse Weise voneinander abhängen. Weil nämlich $y = x^m$ und $z = x^n$ ist, wird $y^n = z^m$ sein, von welchem Zusammenhang dennoch nicht verhindert wird, dass für $y = 0$ oder $y = 1$ auch $z = 0$ oder $z = 1$ wird. Dennoch ist daher indes keineswegs klar, warum deswegen die beiden Formeln

$$\int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = 1 \end{bmatrix}$$

ungleich hervorgehen können; daher scheint diese Beobachtung gar nichts dazu beizutragen, diesen Zweifel zu beseitigen.

§11 Ja diese um vieles allgemeinere Gleichung

$$\int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = a \\ \text{bis } y = b \end{bmatrix} = \int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = a \\ \text{bis } z = b \end{bmatrix}$$

scheint überhaupt keinen Zweifel unterworfen, weil ja überhaupt nichts verhindert, dass wir y anstelle von z schreiben und umgekehrt; aber sehr viele in der Analysis beobachtete Phänomene lehren hinreichend deutlich, dass Gleichheiten von dieser Art manchmal Ausnahmen erfahren, wannimmer die Werte unendlich werden. Aber dieser Umstand hat in unserem Fall natürlich Geltung, weil die Integralformel $\int \frac{dy}{\log y}$, wenn sie von $y = 0$ bis hin zu $y = 1$ erstreckt wird, selbstredend bis ins Unendliche wächst, was auch über die andere $\int \frac{dz}{\log z}$ festzuhalten ist. Wenn nämlich die Abszisse $= 1$ wird, wird die Ordinate unserer Kurve, die $\frac{1}{\log z}$ ist, offensichtlich unendlich groß, woher die obige allgemeine Gleichheit

$$\int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = a \\ \text{bis } y = b \end{bmatrix} - \int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = a \\ \text{bis } z = b \end{bmatrix} = 0$$

diese Einschränkung erfordert, dass weder $a = 1$ noch $b = 1$ ist, in welchen Fällen jede der beiden Formeln natürlich unendlich wird.

§12 Nachdem diese Dinge betrachtet worden sind, glaube ich für meine Person, dass gar kein Zweifel mehr besteht, dass in dem Umstand die wahre Lösung des vorgelegten Paradoxons zu suchen ist, welches natürlich darin besteht, dass

$$\text{so} \quad -\int \frac{dy}{\log y} \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = 1 \end{bmatrix} = \infty \quad \text{wie} \quad -\int \frac{dz}{\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = 1 \end{bmatrix} = \infty$$

ist, sodass die Differenz dieser Unendlichkeiten irgendeiner endlichen Größe gleich werden kann und daher für sich betrachtet nicht bestimmt wird; dass aber diese Differenz in unserem Fall $\log \frac{n}{m}$ und daher bestimmt ist, kommt daher, dass $y^n = z^m$ ist.

§13 Etwas Ähnliches kann bei einfacheren Formeln geschehen, wie sie $\int \frac{dy}{y}$ und $\int \frac{dz}{z}$ sind, von welchen die Werte von den Grenzen $y = 0$ und $z = 0$ genommen unendlich sind, woher, auch wenn nach der Integration dieselbe *obere* Grenze festgelegt wird, natürlich $y = 1$ und $z = 1$, daher dennoch in keiner Weise folgt, dass die Differenz Null wird, ja sie wird sogar eher als unbestimmt betrachtet werden müssen, weil freilich für andere Integrationsgrenzen gewiss

$$\int \frac{dy}{y} \begin{bmatrix} \text{von } y = a \\ \text{bis } y = b \end{bmatrix} = \int \frac{dz}{z} \begin{bmatrix} \text{von } z = a \\ \text{bis } z = b \end{bmatrix}$$

ist, solange weder a noch b entweder $= 0$ oder $= \infty$ war.

§14 Und daher kann auch ein dem vorgelegten sehr ähnliches Paradoxon vorgebracht werden, welches sich so verhält, dass

$$\int \frac{dz}{z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = \infty \end{bmatrix} - \int \frac{dz}{z} \begin{bmatrix} \text{von } z = 0 \\ \text{bis } z = \infty \end{bmatrix} = \log a$$

ist; weil seine Gültigkeit bewiesen ist, wenn freilich $z = ay$ genommen wird, wird auch das vorgelegte Paradox entsprechend gelöst anzusehen sein.

Bemerkungen zu diesem Lehrsatz von Lagrange

$$\int \frac{x^n - x^m}{\log x} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int (b^y - a^y) \frac{dy}{y} \begin{bmatrix} \text{von } y = m \\ \text{bis } y = n \end{bmatrix}$$

§15 Nachdem ich für meine Person vor einiger Zeit Reduktionen von Formeln dieser Art behandelt hatte, habe ich keine anderen Integrationsgrenzen als von $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ betrachtet, woher dieser Lehrsatz mir sofort von größerer Tiefe und ganz und gar bemerkenswert erschien, dass er mit größter Sorgfalt entwickelt wird. Ich habe also beschlossen, seine Gültigkeit zuerst mithilfe von Reihen zu ermitteln, welche Aufgabe ich auf die folgende Weise gelöst habe.

§16 Weil

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} = 1 + \alpha \log x + \frac{(\alpha \log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\alpha \log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

ist, wird

$$x^n - x^m = (n - m) \frac{\log x}{1} + (n^2 - m^2) \frac{(\log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(n^3 - m^3)(\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

sein. Wir wollen also diese Reihe mit $\frac{dx}{x \log x}$ multiplizieren, und weil im Allgemeinen

$$\int (\log x)^\lambda \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \frac{(\log b)^\lambda - (\log a)^\lambda}{\lambda}$$

ist, wird der Wert der Formel auf der linken Seite durch diese unendliche Reihe ausgedrückt werden

$$\frac{n-m}{1}\cdot\frac{\log b-\log a}{1}+\frac{n^2-m^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{2}+\frac{n^3-m^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(\log b)^3-(\log a)^3}{3}+\text{etc.}$$

§17 In gleicher Weise wird für die Formel auf der rechten Seite mit einer unendlichen Reihe

$$b^y-a^y=y\frac{\log b-\log a}{1}+y^2\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{1\cdot 2}+y^3\frac{(\log b)^3-(\log a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc.}$$

sein, welche also mit $\frac{dy}{y}$ multipliziert werde, und weil im Allgemeinen

$$\int y^\lambda\frac{dy}{y}\begin{bmatrix}\text{von } y=m\\ \text{bis } y=n\end{bmatrix}=\frac{n^\lambda-m^\lambda}{\lambda}$$

sein wird, wird der Wert dieser Formel mit dieser unendlichen Reihe ausgedrückt werden

$$\frac{n-m}{1}\cdot\frac{\log b-\log a}{1}+\frac{n^2-m^2}{2}\cdot\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{1\cdot 2}+\frac{n^3-m^3}{3}\cdot\frac{(\log b)^3-(\log a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{etc..}$$

Weil also diese Reihe mit der vorhergehenden vollkommen übereinstimmt, ist die Gültigkeit dieses Theorems sehr streng gezeigt.

§18 Aber daher wird keineswegs erkannt, wie der sehr scharfsinnige Autor auf dieses Theorem gestoßen ist, weswegen ich nach eingehender Betrachtung der Sache einen Weg gefunden habe, aus denselben Prinzipien, die ich zuvor verwendet habe, zu denselben Formen zu gelangen. Es ist aber von dieser sehr einfachen Formel

$$\int x^\lambda\frac{dx}{x}\begin{bmatrix}\text{von } x=a\\ \text{bis } x=b\end{bmatrix}=\frac{b^\lambda-a^\lambda}{\lambda}$$

aus zu beginnen, wo ich, beide Seite mit $d\lambda$ multiplizierend, erneut eine Integration durchführe, und weil, wie schon verschiedenerorts gefunden wird,

$$\int d\lambda\int x^\lambda\frac{dx}{x}=\int\frac{dx}{x}\int x^\lambda d\lambda$$

ist, muss nur dieses Integral $\int x^\lambda d\lambda$ für konstant betrachtetes x, sodass allein λ variabel ist, gesucht werden. Es ist aber

$$\int x^\lambda d\lambda = \frac{x^\lambda}{\log x} + C,$$

wie aus den Elementen des Expoentialkalküls bekannt ist. Hier besteht also das Herz der Sache darin, dass dieses Integral mit einem gewissen Gesetz bestimmt wird, welches darauf folgenden auch auf der anderen Seite eingehalten werden muss. Wir wollen also festlegen, dass solche Integrale so genommen werden, dass sie für $\lambda = 0$ verschwinden, und es wird

$$\int x^\lambda d\lambda = \frac{x^\lambda - 1}{\log x}$$

sein, wonach wir für die linke Seite

$$\int d\lambda \int x^\lambda \frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^\lambda - 1}{\log x}$$

haben werden.

§19 Für die rechte Seite werden wir aber

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda}(b^\lambda - a^\lambda)$$

haben, nachdem welche Formel nach demselben Gesetz integriert worden ist, dass für $\lambda = 0$ Null hervorgeht, wird sich dieser Wert mit der hier eingeführten Bezeichungsweise darstellen lassen

$$\int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = \lambda \end{bmatrix}.$$

Hier haben wir nämlich nichts anderes gemacht, außer dass wir y für λ geschrieben haben und nach der Integration angenommen haben, dass der Wert λ wieder anstelle von y eingesetzt wird, und so haben wir die folgende Formel erhalten, nämlich als

$$\int (x^\lambda - 1)\frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = \lambda \end{bmatrix},$$

welche sich als sehr nützliches Theorem ansehen lässt.

§20 Vermöge dieses Lehrsatzes haben wir also die folgenden Reduktionen erhalten

$$\int (x^n - 1)\frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = n \end{bmatrix}$$

und

$$\int (x^m - 1)\frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = m \end{bmatrix};$$

wenn also die zweite Formel von der ersten abgezogen wird, wird

$$\int (x^n - x^m)\frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = a \\ \text{bis } x = b \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = n \end{bmatrix} - \int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = 0 \\ \text{bis } y = m \end{bmatrix}$$

sein; aber diese Formel auf der rechten Seite wird mit der in Lemma 3 gezeigten Reduktion auf diese einfachere Form zurückgeführt

$$\int \frac{dy}{y}(b^y - a^y) \begin{bmatrix} \text{von } y = m \\ \text{bis } y = n \end{bmatrix};$$

daher ist klar, dass auf diese Weise diese außerordentliche Theorem auch aus unseren Prinzipien gefunden werden konnte.

§21 Dieses sehr allgemeine Theorem hat der sehr geniale Herr verwendet, um mein Theorem zu beweisen, in welchem ich gezeigt habe, dass

$$\int (x^n - x^m)\frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = 1 \end{bmatrix} = \log \frac{n}{m}$$

ist; denn es war nur nötig, dass man $a = 0$ und $b = 1$ hat, wonach die Integralformel auf der rechten Seite in

$$\int \frac{dy}{y} \begin{bmatrix} \text{von } y = m \\ \text{bis } y = n \end{bmatrix}$$

übergeht, deren Wert natürlich $\log n - \log m = \log \frac{n}{m}$ ist, welches ein neuer Beweis meines Lehrsatzes ist, von welcher Art ich freilich schon vor einiger Zeit mehrere gegeben hatte.

$$\int \frac{(x^n - x^m)dx}{(1+x^r)\log x}\begin{bmatrix}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=\infty\end{bmatrix} = \log\frac{\tan\frac{(n+1)\pi}{2r}}{\tan\frac{(m+1)\pi}{2r}}$$

§22 Weil hier die beiden Exponenten m und n weder voneinander noch vom Exponenten r abhängen, ist es offensichtlich, dass für jede der beiden Potenzen x^m und x^n jeweils das Integral eine solche Form haben muss

$$\int \frac{x^n dx}{(1+x^r)\log x} = \log\frac{(n+1)\pi}{2r} + C \quad \text{und} \quad \int \frac{x^m dx}{(1+x^r)\log x} = \log\frac{(m+1)\pi}{2r} + C.$$

Wenn nämlich die zweite Form von der ersten abgezogen wird, wird die Konstante C aus der Rechnung herausgehen und das vorgelegte Integral resultiert. Hier wird es also sehr hilfreich sein, den Wert dieser Konstante C bestimmt zu haben.

§23 Unter diesen Integralformeln, deren Werte ich für den Fall, in welchem nach der Integration die Variable als unendlich festgelegt wird, aus den ersten Prinzipien des Integralkalküls angegeben habe, wird diese gefunden

$$\int \frac{x^{k+n}dx}{1+x^{2k}}\cdot\frac{dx}{x}\begin{bmatrix}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=\infty\end{bmatrix} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}} = \frac{\pi}{2k\sin\frac{(k+n)\pi}{2k}},$$

wo aber angenommen wird, dass der Exponent n nicht größer genommen wird als k. Wenn also hier nun der Exponent n wie eine Variable und x wie eine Konstante behandelt wird und auf beiden Seiten mit dn multipliziert wird und erneut integriert wird, wird die linke Formel

$$\int dn \int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{x(1+x^{2k})}\int x^{k+n}dn$$

sein, wo das letzte Integral

$$\int x^{k+n}dn = \frac{x^{k+n}}{\log x} + C$$

wird. Um aber dieses Integral bestimmt zu machen, wollen wir die Konstante so wählen, dass das Integral für $n=0$ verschwindet, woher man

$$\int x^{k+n} dn = \frac{x^{k+n} - x^k}{\log x}$$
erhält, sodass die Integralformel auf der linken Seite
$$\int \frac{x^{k+n} - x^k}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x}$$
sein wird.

§24 Für die rechte Seite werden wir aber dieses Integral haben
$$\int \frac{\pi dn}{2k \sin \frac{(k+n)\pi}{2k}},$$
ebenfalls so zu nehmen, dass es für $n = 0$ gesetzt verschwindet. Für dieses Ziel wollen wir den Winkel $\frac{(k+n)\pi}{2k} = \varphi$ setzen, und weil daher $d\varphi = \frac{\pi dn}{2k}$ sein wird, wird unsere zu integrierende Form $\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi}$ sein, deren Integral nach bekannten Regeln im Allgemeinen
$$\log \tan \frac{1}{2} \varphi + C = \log \tan \frac{(k+n)\pi}{4k} + C$$
ist, was für $n = 0$ gesetzt in $\log \tan \frac{\pi}{4} + C$ übergeht. Weil $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ und $\log 1 = 0$ ist, ist es ersichtlich, dass die Konstante $C = 0$ sein wird, sodass dieses gesuchte Integral $\log \frac{(k+n)\pi}{4k}$ ist. Daher haben wir also diese allgemeine Reduktion erhalten
$$\int \frac{x^{k+n} - x^k}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(k+n)\pi}{4k},$$
wo aber sorgfältig beachtet werden muss, dass die Exponenten m und n nicht größer gewählt werden als k.

§25 Weil also, indem anstelle von n eine andere Zahl m genommen wird, in gleicher Weise
$$\int \frac{x^{k+m} - x^k}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(k+m)\pi}{4k},$$
ist, ziehe man diese Formel von der vorhergehenden ab und man wird diese erhalten

$$\int \frac{x^{k+n} - x^{k+m}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \frac{\tan \frac{(k+n)\pi}{4k}}{\tan \frac{(k+m)\pi}{4k}},$$

welche natürlich mit der vorgelegten Form übereinstimmt, wenn nur n anstelle von $k+n-1$ und m anstelle von $k+m-1$ geschrieben wird, aber r anstelle des Exponenten $2k$ geschrieben wird; denn dann wird offensichtlich

$$\int \frac{(x^n - x^m)dx}{(1 + x^r)\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \frac{\tan \frac{(n+1)\pi}{2r}}{\tan \frac{(m+1)\pi}{2r}}$$

werden.

§26 Weil diese Analysis uns ja zu dieser Form geführt hat

$$\int \frac{x^{k+n} - x^{k}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(k+n)\pi}{4k},$$

wird es hier von größter Bedeutung sein bemerkt zu haben, dass immer

$$\int \frac{x^{k}}{1 + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = 0$$

sein wird, was ich anders auch so zeigen kann. Man setze $x^k = z$; es wird

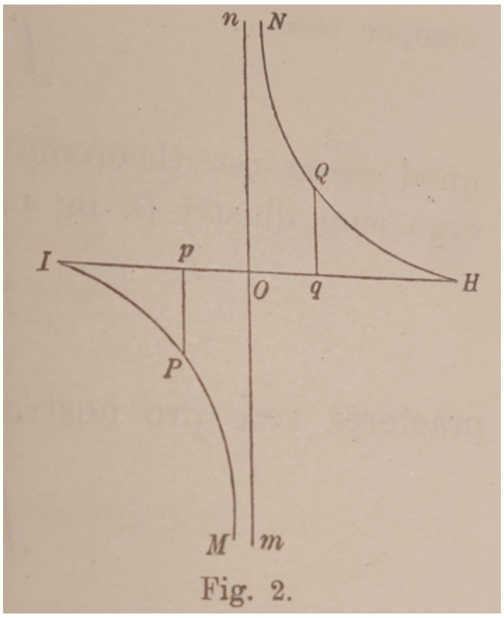
$$x^{k-1}dx = \frac{dz}{k} \quad \text{und} \quad \log x = \frac{\log z}{k}$$

sein und so wird diese Formel diese Form $\int \frac{dz}{(1+zz)\log z}$ annehmen, wo die Integrationsgrenzen immer noch $z = 0$ und $z = \infty$ sind. Es werde weiter $z = \tan \varphi$, woher die Integrationsgrenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sein werden; daher wird aber wegen $d\varphi = \frac{dz}{1+zz}$ diese Formel entstehen

$$\int \frac{d\varphi}{\log \tan \varphi} \begin{bmatrix} \text{von } \varphi = 0 \\ \text{bis } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix},$$

deren Wert gezeigt werden muss zu verschwinden.

§27 Um das zu beweisen, lege man als Achse $IH = \frac{\pi}{2}$ fest (Fig. 2), nachdem über welcher vom Anfang I aus die unbestimmte Abszisse $Ip = \varphi$ genommen worden ist, sei die Ordinate $= \frac{1}{\tan \varphi}$.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Wenn also hier die Achse IH in O in zwei Teile geteilt wird, dass $IO = \frac{\pi}{4}$ ist, wird die Ordinate in diesem Punkt

$$= \frac{1}{\log \tan \frac{\pi}{4}} = \infty$$

sein. Nun nehme von diesem Punkt O aus zu beiden Seiten hin, die gleichen Strecken $Op = Oq = \omega$ und für den Punkt P wird $\varphi = \frac{\pi}{4} - \omega$ sein und so wird die Ordinate in diesem Punkt P

$$= \frac{1}{\log \tan \left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)}$$

sein; es ist aber $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)$, woher, weil $\log \cot = -\log \tan$ ist, die Ordinate in diesem Punkt p

$$= \frac{-1}{\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)}$$

sein wird; aber weil $Iq = \frac{\pi}{4} + \omega$ ist, wird die Ordinate im Punkt q

$$= \frac{+1}{\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)}$$

und so ist sie gleich der Ordinate in p, aber in die andere Richtung laufend. Wenn also die nach oben gerichtete Ordinate qQ war, wird im Punkt p dieselbe Ordinate nach unten gerichtet $Pp = Qq$ sein.

§28 Wenn also eine solche Kurve über der Achse $IH = \frac{\pi}{2}$ konstruiert wird, sodass der Abszisse φ die Ordinate $\frac{1}{\log \tan \varphi}$ entspricht, wird diese Kurve aus zwei einander vollkommen gleichen um den Mittelpunkt O herum gelegen Anteilen bestehen, dass die linke Kurve IPM ins Unendliche zur Asymptote Om fallend ist, aber der rechte Anteil in gleicher Weise von H nach links zur Asymptote On nach oben wächst. Daher, weil die Integralformel $\int \frac{d\varphi}{\log \tan \varphi}$ von $\varphi = 0$ bis hin zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erstreckt die ganze Fläche dieser Kurve von I bis hin zu H ausdrückt, ist es ersichtlich, dass diese ganze Fläche zu Null wird, weil ihr negativ zu nehmender Anteil dem positiv zu nehmenden Anteil vollkommen identisch ist.

§29 So ist also mit einem ganz und gar einzigartigen Beweis gezeigt, dass immer

$$\int \frac{x^k}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = 0$$

ist, was gewiss ein in dieser Art höchst bemerkenswertes Theorem ist. Wenn wir daher also mit dem illustren Lagrange $2k = r$ setzen, wird

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}r-1}dx}{(1+x^r)\log x} = 0$$

sein; außerdem wird aber für unsere in § 24 dargebotene Formel wegen

$$\int \frac{x^k dx}{(1+x^{2k})x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = 0$$

dieses ganz und gar bemerkenswerte Theorem abgeleitet

$$\int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(k+n)\pi}{4k},$$

welches in der Lagarange'schen Weise so vorgelegt werden kann

$$\int \frac{x^n dx}{(1+x^r)\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(n+1)\pi}{2r};$$

und so ist klar, dass jene oben (§ 22) von uns eingeführte Konstante in Wahrheit Null ist.

§30 Weil ja der Beweis dieses Theorems auf eine ziemlich unübliche Methode gestützt ist, wird es förderlich sein, seine Gültigkeit mithilfe von Reihen gezeigt zu haben. Dafür ist es aber vonnöten, den Wert der Formel

$$\int \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+x^r)\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix}$$

in zwei Teile zu teilen (indem man natürlich $\lambda - 1$ anstelle von n schreibt), welche

$$P = \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+x^r)\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+x^r)\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x=1 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix}$$

seien, sodass $P+Q$ den Wert ausdrückt, den wir suchen. Nun wollen wir im zweiten Teil $\frac{1}{z}$ anstelle von x schreiben und es wird

$$Q = \int \frac{z^{-\lambda}}{1+z^{-z}} \cdot \frac{dz}{z\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z=1 \\ \text{bis } z=0 \end{bmatrix} = \int \frac{z^{r-\lambda}}{1+z^r} \cdot \frac{dz}{z\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z=1 \\ \text{bis } z=0 \end{bmatrix}$$

und nach Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$Q = -\int \frac{z^{r-\lambda}}{1+z^r} \cdot \frac{dz}{z\log z} \begin{bmatrix} \text{von } z=0 \\ \text{bis } z=1 \end{bmatrix}$$

sein. Nun wollen wir aber x anstelle von z schreiben; weil diese Integrationsgrezen in beiden Teilen dieselben sind, wird

$$P+Q = \int \frac{x^{\lambda}-x^{r-\lambda}}{1+x^r} \cdot \frac{dx}{x\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix}$$

sein, deren Wert also der vorgelegten Formel gleich ist.

§31 Nun wollen wir den Bruch $\frac{1}{1+x^r}$ in eine unendliche Reihe umwandeln

$$1 - x^r + x^{2r} - x^{3r} + x^{4r} - \text{etc.},$$

deren einzelne Terme mit $\frac{dx}{x\log x}(x^{\lambda} - x^{r-\lambda})$ multipliziert

$$\frac{dx}{x\log x}(x^{\lambda}-x^{r-\lambda})-\frac{dx}{x\log x}(x^{r+\lambda}-x^{2r-\lambda})+\frac{dx}{x\log x}(x^{2r+\lambda}-x^{3r-\lambda})-\frac{dx}{x\log x}(x^{3r+\lambda}-x^{4r-\lambda})+\text{etc.}$$

ergeben. Weil aber nach dem Haupttheorem in dieser Art

$$\int \frac{dx}{x\log x}(x^{\alpha}-x^{\beta})\begin{bmatrix}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=1\end{bmatrix}=\log\frac{\alpha}{\beta}$$

ist, wird nach Integrieren der einzelnen Glieder auf diese Weise

$$P+Q=\log\frac{\lambda}{r-\lambda}-\log\frac{r+\lambda}{2r-\lambda}+\log\frac{2r+\lambda}{3r-\lambda}-\log\frac{3r+\lambda}{4r-\lambda}+\text{etc.}$$

sein.

§32 All diese Logarithmen werden sich zu einem einzigen vermengen lassen, wenn man den Vorzeichen Rechnung trägt, und auf diese Weise wird man finden, dass

$$P+Q=\log\frac{\lambda}{r-\lambda}\cdot\frac{2r-\lambda}{r+\lambda}\cdot\frac{2r+\lambda}{3r-\lambda}\cdot\frac{4r-\lambda}{3r+\lambda}\cdot\frac{4r+\lambda}{5r-\lambda}\cdot\frac{6r-\lambda}{5r+\lambda}\cdot\text{etc.}$$

sein wird. Aber in der *Introductione in Analysin Infintorum* S. 147 habe ich gezeigt, dass

$$\tan\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{2n+m}{3n-m}\cdot\frac{4n-m}{3n+m}\cdot\frac{4n+m}{5n-m}\cdot\text{etc.}$$

ist, welche Reihe natürlich in die gefundene überführt wird, wenn man $m=\lambda$ und $n=r$ setzt, sodass nun $P+Q=\log\tan\frac{\lambda\pi}{2r}$ ist, genauso wie es oben gefunden worden ist.

Anhang

§33 In der in Buch V, Teil I, der **Actorum** beigefügten Abhandlung, woraus ich dieses Theorem entnommen habe

$$\int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}}\cdot\frac{dx}{x}\begin{bmatrix}\text{von } x=0\\ \text{bis } x=\infty\end{bmatrix}=\frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

treten zugleich die folgenden auf

$$\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

$$\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

$$\int \frac{x^{k-n}-x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{k}\tan\frac{n\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

$$\int \frac{x^{k-n}-x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2k}\tan\frac{n\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

$$\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+2x^k\cos\eta+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix} = \frac{2\pi\sin\frac{n\eta}{k}}{k\sin\eta\sin\frac{n\pi}{k}},$$

$$\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+2x^k\cos\eta+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix} = \frac{\pi\sin\frac{n\eta}{k}}{k\sin\eta\sin\frac{n\pi}{k}},$$

$$\int \frac{x^{k\pm n}}{1+2x^k\cos\eta+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=\infty \end{bmatrix} = \frac{\pi\sin\frac{n\eta}{k}}{k\sin\eta\sin\frac{n\pi}{k}},$$

welche Formeln also der Mühe Wert sein werden, sie in gleicher Weise zu behandeln.

§34 Wir wollen also mit der Formel

$$\int \frac{x^{k-n}+x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x=0 \\ \text{bis } x=1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}}$$

beginnen, weil die vorhergehende mit der schon behandelten vollkommen übereinstimmt; wenn diese mit dn multipliziert wird und so integriert wird, dass das Integral für $n=0$ verschwindet, weil ja

$$\int x^{k-n}dn = -\frac{x^{k-n}-x^k}{\log x} \quad \text{und} \quad \int x^{k+n}dn = \frac{x^{k+n}-x^k}{\log x}$$

ist, dann aber, wie wir zuvor gesehen haben,

$$\int \frac{\pi dn}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}} = \log\tan\frac{(k+n)\pi}{4k}$$

ist, wird diese Integration hervorgehen

$$\int \frac{x^{k+n} - x^{k-n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = 1 \end{bmatrix} = \log \tan \frac{(k+n)\pi}{4k},$$

welcher Wert also vollkommen mit dem übereinstimmt, den wir für die Formel

$$\int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix}$$

gefunden haben.

§35 In gleicher Weise wollen wir die folgende Formel behandeln

$$\int \frac{x^{k-n} - x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{k} \tan \frac{n\pi}{2k},$$

welche mit dn multipliziert und wie oben integriert auf der linken Seite

$$\int \frac{2x^k - x^{k-n} - x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix}$$

liefert, für die rechte Seite hingegen

$$\int \frac{\pi dn}{k} \tan \frac{n\pi}{2k} = \int \frac{\pi dn \sin \frac{n\pi}{2k}}{k \cos \frac{n\pi}{2k}}.$$

Um dies zu integrieren, werde $\frac{n\pi}{2k} = \varphi$ und wird $\frac{\pi dn}{k} = 2d\varphi$ sein und so wird die zu integrierende Formel

$$2 \int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi} = -2 \log \cos \varphi + C = -2 \log \cos \frac{n\pi}{2k} + C$$

sein. Nun werde also $n = 0$ und es wird $-2 \log 1 + C = 0$ und daher die Konstante $C = 0$, weshalb diese Integration uns die folgende Formel an die Hand geben wird

$$\int \frac{2x^k - x^{k-n} - x^{k+n}}{1-x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = -2 \log \cos \frac{n\pi}{2k};$$

aber die folgende Formel $\begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = 1 \end{bmatrix}$ bedarf keiner eigenen Entwicklung, weil ihr Wert die Hälfte von dieser sein wird.

§36 Wir wollen den Fall entwickeln, in dem $k = 2$ und $n = 1$ ist, und von der linken Seite werden wir

$$-\int \frac{(1-x)^2}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\log x} = -\int \frac{1-x}{(1+x)(1+xx)} \cdot \frac{dx}{\log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix}$$

haben; aber von der rechten Seite $-2 \log \cos \frac{\pi}{4} = 2 \log \sqrt{2} = \log 2$. Aber der Bruch $\frac{1-x}{(1+x)(1+xx)}$ wird in diese zwei aufgelöst $\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+xx}$, woher unsere Formel in diese zwei aufgelöst wird

$$-\int \frac{dx}{(1+x)\log x} + \int \frac{xdx}{(1+xx)\log x} = \log 2.$$

Aber aus der allgemeinen Form

$$\int \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+x^r)\log x} = \log \tan \frac{\lambda \pi}{2r}$$

wächst der Wert jeder der beiden Formeln ins Unendliche und so hindert nichts daran, dass die Differenz $= \log 2$ ist.

§37 Wenn wir hier in der letzten Formel $xx = z$ setzen, wird sie in diese $\int \frac{dz}{(1+z)\log z}$ übergehen, welche der ersten vollkommen gleich ist und dieselben Integrationsgrenzen hat. Hier tritt wiederum ein jenem völlig gleiches Paradoxon zutage, welchem von illustren Lagrange erwähnt wurde; natürlich hat man hier die zwei vollkommen gleichen Formeln $\int \frac{dx}{(1+x)\log x}$ und $\int \frac{dz}{(1+z)\log z}$, von welchen jede der beiden von der Grenze 0 bis hin zu ∞ integriert werden muss; nichtsdestoweniger ist deren Differenz nicht Null, sondern, wie wir gesehen haben, $= \log 2$. Und daher ist die Lösung dieses Paradoxons natürlich darin gelegen, dass der Wert jedes der beiden Integrale ins Unendliche wächst.

§38 Wenn wir die beiden letzten Formeln auf dieselbe Weise behandeln und mit dn multipliziert integrieren wollen, resultiert von der linken Seite diese Integralformel

$$\int \frac{x^{k+n} - x^{k-n}}{1 + 2x^k \cos \eta + x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x \log x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix};$$

für die rechte Seite erlangen wir aber diese Integralformel

$$\int \frac{2\pi dn \sin\frac{n\eta}{k}}{k \sin\eta \sin\frac{n\pi}{k}},$$

welche von der Grenze $n = 0$ aus zu erstrecken ist. Aber diese Integration gelingt auf keine Weise; wenn wir nämlich $\frac{n\pi}{k} = \varphi$ setzen, wird $\frac{n\eta}{n} = \frac{n\varphi}{\pi} = \alpha\varphi$, indem wir $\frac{\eta}{\pi} = \alpha$ setzen, woher die zu integrierende Formel $\frac{2}{\sin\eta}\int\frac{d\varphi \sin\alpha\varphi}{\sin\varphi}$ sein wird, deren Wert nicht anders als mit einem Integralzeichen ausgedrückt werden kann, und so lassen sich daraus keine gefälligen Theoreme ableiten.

§39 Wie wir aber hier, indem der Exponent n als Variable angesehen wird, die Integration durchgeführt haben, so wird auch eine Differentiation außergewöhnliche Transformationen an die Hand geben, welchen Gegenstand an einer einzigen wesentlichen Formel illustriert zu haben ausreichen wird. Wir wollen natürlich diese Formel betrachten

$$\int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}},$$

welche, wenn der Exponent n allein als Variable genommen wird, wiederholt differenziert werde, wo zu bemerken ist, dass $d.x^{k+n} = x^{k+n} dn \log x$ ist. Aber für die Formel $\frac{\pi}{2k\cos\frac{n\pi}{2k}}$ wollen wir den Buchstaben ν schreiben, welcher also als Funktion von n anzusehen sein wird, deren Differentiale jeder Ordnung also in unserer Macht sind. Daher werden wir diese Reduktionen erlangen

$$\int \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}} \cdot \frac{dx}{x} \log x = \frac{d\nu}{dn}$$

oder

$$\int \frac{x^{k+n-1}dx \log x}{1+x^{2k}} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{d\nu}{dn},$$

$$\int \frac{x^{k+n-1}dx(\log x)^2}{1+x^{2k}} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{d^3\nu}{dn^3},$$

$$\int \frac{x^{k+n-1}dx(\log x)^3}{1+x^{2k}} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{d^3\nu}{dn^3},$$

$$\int \frac{x^{k+n-1}dx(\log x)^4}{1+x^{2k}} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{d^4\nu}{dn^4},$$

$$\int \frac{x^{k+n-1}dx(\log x)^5}{1+x^{2k}} \begin{bmatrix} \text{von } x = 0 \\ \text{bis } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{d^5\nu}{dn^5}$$

etc.

§40 Weil also daher die ganze Aufgabe auf die wiederholten Differentiale von ν zurückgeführt werden, werden sie sich auf diese folgende Weise sehr bequem finden lassen. Weil nämlich

$$\nu = \frac{\pi}{2k \cos \frac{n\pi}{2k}}$$

ist, wird $\nu \cos \frac{n\pi}{2k} = \frac{\pi}{2k}$ sein und daher werden wir durch wiederholtes Differenzieren die folgenden Formeln erhalten

$$\frac{dv}{dn}\cos\frac{n\pi}{2k} - \frac{\pi}{2k}v\sin\frac{n\pi}{2k} = 0,$$

$$\frac{ddv}{dn^2}\cos\frac{n\pi}{2k} - \frac{2\pi dv}{2kdn}\sin\frac{n\pi}{2k} - \frac{\pi\pi}{4kk}v\cos\frac{n\pi}{2k} = 0,$$

$$\frac{d^3v}{dn^3}\cos\frac{n\pi}{2k} - \frac{3\pi ddv}{2kdn^2}\sin\frac{n\pi}{2k} - \frac{3\pi\pi}{4kk}\frac{dv}{dn}\cos\frac{n\pi}{2k} + \frac{\pi^3}{8k^3}v\sin\frac{n\pi}{2k} = 0,$$

$$\frac{d^4v}{dn^4}\cos\frac{n\pi}{2k} - \frac{4\pi d^3v}{2kdn^3}\sin\frac{n\pi}{2k} - \frac{6\pi\pi}{4kk}\frac{ddv}{dn^2}\cos\frac{n\pi}{2k} + \frac{4\pi^3}{8k^3}\frac{dv}{dn}\sin\frac{n\pi}{2k} + \frac{\pi^4}{16k^4}v\cos\frac{n\pi}{2k} = 0$$

etc.,

woher die einzelnen höheren Differentiale aus den unteren gebildet werden können.

§41 Um diese Operationen aber noch weiter zu vereinfachen, wollen wir der Kürze wegen $\frac{\pi}{2k} = \alpha$ setzen, dass $v = \frac{\alpha}{\cos\alpha n}$ ist, und die einzelnen Differentiale werden aus den oberen Gleichungen auf die folgende Weise bestimmt werden

$$\frac{dv}{dn} = \alpha v\tan\alpha n,$$

$$\frac{ddv}{dn^2} = 2\alpha\frac{dv}{dn}\tan\alpha n + \alpha\alpha n,$$

$$\frac{d^3v}{dn^2} = 3\alpha\frac{ddv}{dn^2}\tan\alpha n + 3\alpha\alpha\frac{dv}{dn} - \alpha^3 v\tan\alpha,$$

$$\frac{d^4v}{dn^4} = 4\alpha\frac{d^3v}{dn^3}\tan\alpha n + 6\alpha\alpha\frac{ddv}{dn^2} - 4\alpha^3\frac{dv}{dn}\tan\alpha n - \alpha^4 v,$$

$$\frac{d^5v}{dn^5} = 5\alpha\frac{d^4v}{dn^4}\tan\alpha n + 10\alpha\alpha\frac{d^3v}{dn^3} - 10\alpha^3\frac{ddv}{dn^2}\tan\alpha n - 5\alpha^4\frac{dv}{dn} + \alpha^5 v\tan\alpha n$$

$$= \text{etc.}$$

Wenn wir also der Kürze wegen darüber hinaus $\tan \alpha n = t$ setzen und die vorherigen Werte in den folgenden einsetzen, werden wir finden:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dn} &= \alpha v t, \\
\frac{ddv}{dn^2} &= \alpha\alpha v(2tt+1), \\
\frac{d^3v}{dn^3} &= \alpha^3 v(6t^3+5t), \\
\frac{d^4v}{dn^4} &= \alpha^4 v(24t^4+28tt+5), \\
\frac{d^5v}{dn^5} &= \alpha^5 v(120t^5+180t^3+61t), \\
\frac{d^6v}{dn^6} &= \alpha^6 v(720t^6+1320t^4+662tt+61)
\end{aligned}$$

etc.

§42 Aus der Betrachtung dieser Ausdrücke kann leicht die Operation gefunden werden, mit deren Hilfe aus einem beliebigen dieser Ausdrücke der folgende berechnet werden kann. Es sei nämlich für das Differential unbestimmter Ordnung

$$\frac{d^\lambda v}{dn^\lambda} = a^\lambda v P,$$

aber für die folgende Ordnung

$$\frac{d^{\lambda+1} v}{dn^{\lambda+1}} = a^{\lambda+1} v Q,$$

und weil wir ja gesehen haben, dass der Wert von P eine solche Form hat

$$P = At^\lambda + Bt^{\lambda-2} + Ct^{\lambda-4} + Dt^{\lambda-6} + \text{etc.},$$

wird dann der Wert von Q aus den zwei folgenden Reihen zusammengesetzt sein

$$Q = (\lambda+1)At^{\lambda+1} + (\lambda-1)Bt^{\lambda-1} + (\lambda-3)Ct^{\lambda-3} + (\lambda-5)Dt^{\lambda-5} + \text{etc.}$$
$$+\lambda At^{\lambda-1} + (\lambda-2)Bt^{\lambda-3} + (\lambda-4)Ct^{\lambda-5} + \text{etc.},$$

woher klar ist, dass diese Bestimmung so dargestellt werden kann, dass

$$Q = \frac{td.Pt}{dt} + \frac{dP}{dt}$$

ist.

§43 Aber diese Formel, nach welcher aus dem bekannten Wert P der folgende Q abgeleitet wird, kann auch aus der Natur der Sache selbst auf die folgende Weise gezeigt werden. Weil per Annahme

$$\frac{d^\lambda v}{dn^\lambda} = a^\lambda vP$$

ist, wird durch Differenzieren

$$\frac{d^{\lambda+1}v}{dn^\lambda} = a^\lambda Pdv + a^\lambda vdP$$

sein; eingangs haben wir aber gesehen, dass $\frac{dv}{dn} = \alpha vt$ oder $dv = \alpha vtdn$ ist, nach Einsetzen welches Wertes

$$\frac{d^{\lambda+1}v}{dn^{\lambda+1}} = a^{\lambda+1}vPt + a^\lambda v\frac{dP}{dn}$$

wird; dann haben wir aber $t = \tan \alpha n$ angenommen, woher durch Differenzieren $\alpha dn = \dfrac{dt}{1+tt}$ wird, nach Einsetzen welches Wertes im letztem Terms man

$$\frac{d^{\lambda+1}v}{dn^{\lambda+1}} = \alpha^{\lambda+1}vPt + \alpha^{\lambda+1}v\frac{dP(1+tt)}{dt} = \alpha^{\lambda+1}v\left(Pt + \frac{dP(1+tt)}{dt}\right)$$

erhalten wird, welche Form natürlich auf diese zurückgeführt wird

$$\frac{d^{\lambda+1}v}{dn^{\lambda+1}} = \alpha^{\lambda+1}v\frac{td.Pt+dP}{dt},$$

sodass

$$Q = \frac{td.Pt + dP}{dt} = Pt + \frac{dP(1+tt)}{dt}$$

ist; daher sieht man ein, wenn man $tt + 1 = 0$ nimmt, wonach in unseren Formeln die Vorzeichen der Terme alternieren werden, dass nach Weglassen des Buchstaben t auch $Q = P$ wird; daher ist klar, dass in diesem Fall alle obigen Formeln denselben Wert annehmen werden, was aus den oben dargebotenen Formeln offensichtlich ist, aus welchen $2 - 1 = 1$, $6 - 5 = 1$, $24 - 28 + 5 = 1$, $120 - 180 + 61 = 1$, $720 - 1320 + 662 - 61 = 1$ etc. sein wird, woher man ein starkes Anzeichen erhält, ob diese Formeln richtig durch die Rechnung bestimmt worden sind.